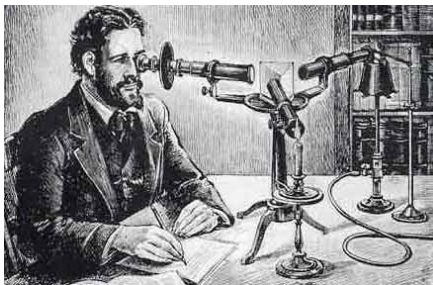


Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Wykład 15

Widmo i promień spektralny



Ustalmy algebrę Banacha A z jedyneką 1 nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Def. Widmem (spektrum) elementu $a \in A$ nazywamy zbiór

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin \text{Inv}(A)\}.$$

Prz. Widmo elementu algebry funkcji na przestrzeni zwartej M

Jeśli $A = C(M)$, to $\text{Inv}(C(M)) = \{a \in C(M) : \forall_{t \in M} a(t) \neq 0\}$ i

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sim (\forall_{t \in M} (a - \lambda 1)(t) \neq 0)\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists_{t \in M} (a - \lambda 1)(t) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists_{t \in M} a(t) = \lambda\} = a(M).\end{aligned}$$

Zatem **widmo funkcji** $a \in C(M)$ jest obrazem tej funkcji.

Uw. W powyższym przykładzie jeśli $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą określoną na widmie $\sigma(a) = a(M) \subseteq \Omega$, to $f(a) := f \circ a$ jest elementem algebry $A = C(M)$ - **rachunek funkcyjny** w algebrze A !

Prz. Widmo operatora działającego na przestrzeni Banacha X

Skoro $\text{Inv}(B(X)) = \{T \in B(X) : T : X \rightarrow X \text{ bijekcja}\}$ to **widmo operatora** $T \in B(X)$ wyraża się wzorem

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda 1 : X \rightarrow X \text{ odwzorowanie nieodwracalne}\}.$$

Czyli $\lambda \in \sigma(T) \iff$

- a) $T - \lambda 1$ **nie jest surjekcją**, lub
- b) $T - \lambda 1$ nie jest injekcją $\iff \ker(T - \lambda 1) \neq \{0\} \iff \exists_{x \in X \setminus \{0\}} Tx = \lambda x \iff \lambda$ jest **wartością własną** dla T .

Jeśli $\dim(X) = n < \infty$, to warunki (a) i (b) są równoważne i wtedy

$$\sigma(T) = \text{zbiór wartości własnych operatora } T.$$

Ponadto, mamy wtedy izomorfizm algebr $B(X) \cong M_n(\mathbb{C})$ oraz $\text{Inv}(M_n(\mathbb{C})) = \{T \in M_n(\mathbb{C}) : \det(T) \neq 0\}$. Zatem dla $T \in M_n(\mathbb{C})$

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(T - \lambda 1) = 0\}.$$

Tw. Widmo dowolnego elementu $a \in A$ algebry Banacha A jest **niepustym zbiorem zwartym** oraz $\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$.

Dowód: Zauważmy, że funkcja $F_a : \mathbb{C} \rightarrow A$ dana wzorem $F_a(\lambda) := a - \lambda 1$ jest ciągła oraz

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \in \text{Inv}(A)\} = F_a^{-1}(\text{Inv}(A)).$$

Zatem, skoro $\text{Inv}(A)$ jest otwarty w A , to $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) = F_a^{-1}(\text{Inv}(A))$ jest zbiorem otwartym, a więc $\sigma(a)$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{C}$.

Niech $|\lambda| > \|a\| \geq 0$. Wtedy $\|\lambda^{-1}a\| < 1$ i z Lematu Neumanna

$$a - \lambda 1 = -\lambda \underbrace{(1 - \lambda^{-1}a)}_{\in \text{Inv}(A)} \in \text{Inv}(A)$$

Czyli $\lambda \notin \sigma(a)$. To dowodzi inkluzji $\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$.
Zatem, widmo $\sigma(a)$ jest zwarte (domknięte i ograniczone).

Założmy nie wprost, że $\sigma(a) = \emptyset$. Wtedy $R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$ jest funkcją zdefiniowaną na całej płaszczyźnie zespolonej:

$$R_a : \mathbb{C} \rightarrow A.$$

Ponadto funkcja $R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$ ma następujące własności:

- ① R_a jest **analityczna**, jako złożenie funkcji analitycznych $F_a(\lambda) = a - \lambda 1 \in A$ oraz $\text{Inv}(A) \ni b \mapsto b^{-1} \in \text{Inv}(A)$.
- ② R_a **zbiega do zera w nieskończoności**, bo dla $|\lambda| > \|a\|$ mamy

$$\begin{aligned}\|R_a(\lambda)\| &= \|(a - \lambda 1)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \|(1 - \lambda^{-1} a)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1} a)^n \right\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda^{-1} a\|^n = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - |\lambda|^{-1} \|a\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|a\|} \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Na mocy 1), 2), dla dowolnego $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ z A^* , funkcja

$$\mathbb{C} \ni \lambda \longmapsto f(R_a(\lambda)) \in \mathbb{C}$$

jest analityczna (holomorficzna) i znika w nieskończoności. Zatem na mocy **Twierdzenia Liouville'a** funkcja ta jest stała i równa zero. Skoro funkcjonały z A^* rozdziwiają elementy A , to $R_a(\lambda) = 0$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$, czyli

$$R_a \equiv 0.$$

W szczególności, $R_a(0) = a^{-1} = 0$. ⚡



Def. Dla dowolnego $a \in A$ oraz $p(z) = \alpha_n z^n + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, kładziemy

$$p(a) := \alpha_n a^n + \dots + \alpha_1 a + \alpha_0 1 \in A.$$

Stw. (o obrazie spektralnym) Dla dowolnego wielomianu p oraz elementu $a \in A$ mamy

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{C}$. Zapiszmy wielomian $p(z) - \lambda$ w postaci iloczynowej, tzn. niech $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$, takie, że

$$p(z) - \lambda = \lambda_0 (z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n).$$

Liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są rozwiązaniami równania $p(z) = \lambda$. Stąd

$$p(a) - \lambda 1 = \lambda_0 (a - \lambda_1 1) \cdot \dots \cdot (a - \lambda_n 1).$$

Jeśli $\lambda_0 = 0$, to $p \equiv \lambda$ i stąd $\sigma(p(a)) = \sigma(\lambda 1) = \{\lambda\} = p(\sigma(a))$.

Założmy, zatem że $\lambda_0 \neq 0$. Wtedy odwracalność $p(a) - \lambda 1$ jest równoważna odwracalności iloczynu $(a - \lambda_1 1) \cdot \dots \cdot (a - \lambda_n 1)$,  która jest z kolei równoważna odwracalności każdego ze składników.

Czyli jeśli $p(z) - \lambda = \lambda_0(z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n)$, to

$$p(a) - \lambda 1 \in \text{Inv}(A) \iff \forall_{i=1, \dots, n} (a - \lambda_i 1) \in \text{Inv}(A).$$

Stąd

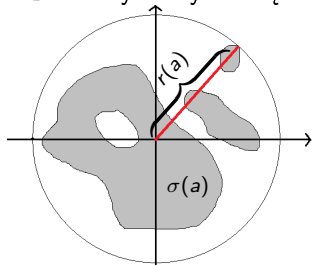
$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(p(a)) &\iff \exists_{i=1, \dots, n} \lambda_i \in \sigma(a) \\ &\iff \sigma(a) \cap \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \neq \emptyset \\ &\iff \sigma(a) \cap \{z \in \mathbb{C} : p(z) = \lambda\} \neq \emptyset \\ &\iff \exists_{z \in \sigma(a)} p(z) = \lambda \\ &\iff \lambda \in p(\sigma(a)). \end{aligned}$$

Zatem $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$. ■

Def. Promieniem spektralnym elementu $a \in A$ nazywamy liczbę

$$r(a) = \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

$r(a)$ to najmniejszy promień koła o środku w zerze, w którym zawarte jest całe widmo $\sigma(a)$.



Tw. (Wzór Beurlinga-Gelfanda-Naimarka)

Promień spektralny elementu $a \in A$ wyraża się wzorem

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \sigma(a)$. Wtedy $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ na mocy **Stw.** i stąd $|\lambda|^n \leq \|a^n\|$ na mocy **Tw.** Czyli $|\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ i stąd

$$r(a) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Zatem wystarczy pokazać, że $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$.

Przypomnijmy, że $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) \ni \lambda \mapsto R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1} \in \text{Inv}(A)$ jest analityczna. Zatem kładąc $\Delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(a)\}$ dla dowolnego $f \in A^*$ funkcja

$$\mathbb{C} \setminus \Delta \ni \lambda \mapsto f(R_a(\lambda)) \in \mathbb{C}$$

jest holomorficzna, czyli posiada rozwinięcie postaci

$$f(R_a(\lambda)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \lambda^{-n}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Delta,$$

gdzie $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, są pewnymi ustalonymi współczynnikami. Z Lematu Neumanna, dla $|\lambda| > \|a\|$ mamy

$$R_a(\lambda) = -\lambda^{-1} (1 - \lambda^{-1} a)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} -a^{n-1} \lambda^{-n}$$

Stąd

$$f(R_a(\lambda)) = \sum_{n=1}^{\infty} f(-a^{n-1}) \lambda^{-n},$$

czyli

$$\lambda_n = f(-a^{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zatem dla każdego $|\lambda| > r(a)$ szereg

$$f(R_a(\lambda)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \lambda^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(-a^{n-1}) \lambda^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(-a^{n-1} \lambda^{-n})$$

jest zbieżny. W szczególności ciąg $\{f(a^{n-1} \lambda^{-n})\}_{n=1}^{\infty}$ zbiega do zera. Skoro zachodzi to dla dowolnego funkcjonału $f \in A^*$, to $\{a^{n-1} \lambda^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ jest słabo zbieżny do zera, a więc ograniczony na mocy Twierdzenia Banacha-Steinhausa. Zatem

$$\begin{aligned} r(a) < |\lambda| &\implies \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|a^n \lambda^{-n}\| \leq M \\ &\implies \forall n \in \mathbb{N} \quad \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}} |\lambda| \\ &\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|. \end{aligned}$$

Stąd $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$. ■

Uw. Szereg $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^n$ jest (bezwzględnie) zbieżny wewnątrz koła o promieniu $r := 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n|^{\frac{1}{n}}$. Jeśli $r(a) < r$, to szereg

$$f(a) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a^n$$

jest (bezwzględnie) zbieżny w A , bo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_n a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n|^{\frac{1}{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = r(a)/r < 1.$$

Tw. (rachunek funkcyjny w algebrach Banacha)

Dla dowolnego $a \in A$ oraz funkcji holomorficznej $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $\sigma(a) \subseteq \Omega$ - zbiór otwarty, mamy poprawnie zdefiniowany operator

$$f(a) := \sum_{k=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(a)(\lambda 1 - a)^{-1} d\lambda \in A,$$

gdzie $\gamma_k \subseteq \Omega$ to drogi Jordana ograniczające $\sigma(a)$.

Wtedy również $f(z) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z)(\lambda - z)^{-1} d\lambda$, $z \in \sigma(a)$.